Correction d'examen MQ

du 12/05/2015

Ex. 1)

$$E = \hbar\omega = \hbar\frac{2\pi}{T} = \hbar\frac{2\pi c}{\lambda} \approx \frac{1{,}05\cdot 10^{-34}\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^{8}}{546\cdot 10^{-9}}\ \mathrm{J} \approx 3{,}62\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$E_{ion} = e\cdot V \approx 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \approx 3{,}2\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

$$E = E_{ion} + \frac{m v_{max}^2}{2} \Longrightarrow$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2(E-E_{ion})}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(\hbar\frac{2\pi c}{\lambda} - eV\right)}{m}} \approx 3\cdot 10^{5}\ \mathrm{m/s}$$

Ex. 2) 1). $\langle\psi|\psi\rangle = |C|^2\left(3^2 + 1^2 + 2^2 + |-i|^2\right) = |C|^2\cdot 15$

$$\Leftrightarrow C = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{15}}, \qquad \alpha\in\mathbb{R}$$

2). On peut mesurer :

$L_z = 0$ $\quad P_{m=0} = \frac{9}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$

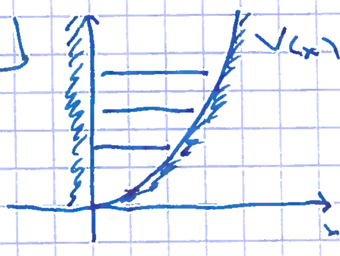
$L_z = 1$ $\quad P_{m=1} = \frac{4}{15}$

$L_z = -1$ $\quad P_{m=-1} = \frac{1}{15}$

3). $$\langle L^2\rangle_\psi = \hbar^2\left\{0\cdot(0+1)\cdot\frac{9}{15} + 1(1+1)\frac{1}{15} + 2(2+1)\frac{4}{15} + 2(2+1)\frac{1}{15}\right.$$

$$= \hbar^2\left(\frac{2}{15} + \frac{24}{15} + \frac{6}{15}\right) = \frac{32}{15}\hbar^2.$$

Ex. 3)



- le spectre est discret et non-dégénéré (mouvement classique borné et unidimensionnel)
- $$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)\psi(x) = E\,\psi(x), \quad x\in\mathbb{R}_{>0}$$

$\psi(x\to\infty) = 0, \quad \psi(x=0) = 0.$

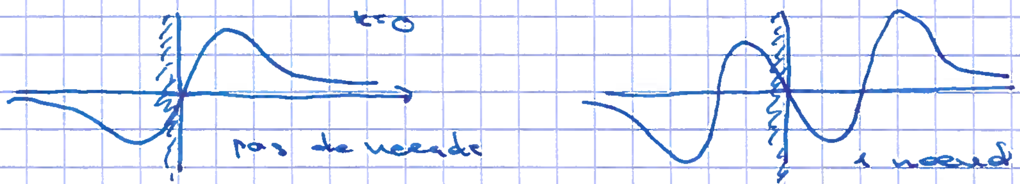
Cela veut dire que toute fonction propre de l'oscillateur harmonique qui s'annule en $x=0$ donne une fonction propre de $\hat{H}$ (par restriction à $x \geq 0$).

C'est le cas des fonctions propres qui correspondent à $n = 1, 3, 5, \ldots$ pour l'oscillateur harmonique. Donc le spectre est

$$E_k = \hbar\omega\left(2k+1+\frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(2k+\frac{3}{2}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\psi_k(x) \sim e^{-\tilde{x}^2/2} H_{2k+1}(\tilde{x})$, où H_n notent les polynômes d'Hermite et $\tilde{x}$ est une coordonnée non-dimensionnée.

On ne peut pas perdre de vue d'autres états propres, car



etc.

Ex. 4

1). $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_m(x)\, e^{-i\frac{E_m}{\hbar}t} + \psi_n(x)\, e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\right)$

2). $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t)\, x\, \psi(x,t)\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_m^*(x)\, e^{+i\frac{E_m}{\hbar}t} + \psi_n^*(x)\, e^{i\frac{E_n}{\hbar}t}\right) x \left(\psi_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} + \psi_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\right) dx$$

$$= \frac{\langle x \rangle_m + \langle x \rangle_n}{2} + \frac{1}{2}\langle m|x|n\rangle\left(e^{i\frac{(E_m-E_n)t}{\hbar}} + e^{-\frac{i(E_m-E_n)t}{\hbar}}\right)$$

$$= \frac{\langle x \rangle_m + \langle x \rangle_n}{2} + \langle m|x|n\rangle \cos\frac{E_n-E_m}{\hbar}t$$

$$v = \frac{d\langle x \rangle}{dt} = -\langle m|x|n\rangle \frac{E_n-E_m}{\hbar} \sin\frac{E_n-E_m}{\hbar}t$$

↳ la vitesse a un comportement oscillatoire

3). Comme $\hat{x}$ est une combinaison linéaire de a et a^+, l'élément matriciel $\langle m|\hat{x}|n\rangle = 0$ pour $n > m+1$ (pourquoi

⇒ la seule possibilité d'avoir $v \neq 0$ est $n = m+1$.

Ex. 5) 1. $\{b, b\} = bb + bb = 2b^2 = 0 \Rightarrow b^2 = 0$

$\{b^+, b^+\} = b^+b^+ + b^+b^+ = 2b^{+2} = 0 \Rightarrow b^{+2} = 0$

2). $\hat{H}^2 = \hbar\omega\, b^+b \cdot \hbar\omega\, b^+b = (\hbar\omega)^2\, b^+ \underbrace{bb^+}_{= 1 - b^+b} b =$

$= (\hbar\omega)^2\, b^+(1 - b^+b)\, b =$

$= (\hbar\omega)^2\, b^+b = \hbar\omega\, \hat{H}.$

Cela implique que les valeurs propres de $\hat{H}$ vérifient la même équation

$$\lambda^2 = \hbar\omega\,\lambda \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = \hbar\omega$$

(les seules solutions possibles)

3). $\hat{H}\,|\varphi_0\rangle = \hbar\omega\, b^+ \underbrace{b\,|\varphi_0\rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$

$\hat{H}\,|\varphi_1\rangle = \hbar\omega\, b^+ \underbrace{b\, b^+}_{= 1 - b^+b} |\varphi_0\rangle = \hbar\omega\, b^+|\varphi_0\rangle = \hbar\omega\, |\varphi_1\rangle$

$\Rightarrow \lambda_1 = \hbar\omega$

4). Il nous faut 2 matrices 2×2 b, b^+ qui vérifient $b^2 = b^{+2} = 0$, $bb^+ + b^+b = 1$.

- Les valeurs propres de b, b^+ sont 0, mais les matrices ne sont pas diagonalisables (sinon identiquement nulles).
- La substitution la plus simple :

$$b = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad b^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2 = b^{+2} = 0$$

automatiquement

- $bb^+ + b^+b = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = a^2\,\mathbb{1}_2 \Rightarrow a^2 = 1$$

Donc on peut prendre

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad b^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$